2025届高三一轮复习联考(一)

数学参考答案及评分意见

1.B 【解析】命题“$\forall x\in\mathbf{R},\frac{1}{2}x^2-\sin x>0$”的否定是“$\exists x\in\mathbf{R},\frac{1}{2}x^2-\sin x\leqslant 0$”.故选B.

2.B 【解析】由题意可知,$A=\{x|x\geqslant 0\}$,$B=\{x|x\leqslant 3\}$,则$\complement_U B=\{x|x>3\}$,故$A\cap(\complement_U B)=(3,+\infty)$.故选B.

3.D 【解析】因为$z=(3+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=4-2\mathrm{i}$,$\bar{z}=4+2\mathrm{i}$,所以$|\bar{z}|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.故选D.

4.A 【解析】$\because \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\alpha$ $\therefore \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore \cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=1-2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$.故选A.

5.C 【解析】因为$15^{\log_{1.5}2}\cdot t=6\times 10^{\log_{1.5}3}$,所以$t=\frac{6\times 10^{\log_{1.5}3}}{15^{\log_{1.5}2}}=\frac{6\times 10^{\log_{1.5}3}}{1.5^{\log_{1.5}2}\times 10^{\log_{1.5}2}}=\frac{6\times 10^{\log_{1.5}3}}{2\times 10^{\log_{1.5}2}}=3\times 10^{\log_{1.5}3-\log_{1.5}2}$

$=3\times 10^{\log_{1.5}\frac{3}{2}}=30$.故选C.

6.C 【解析】由题意,函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增,当$x\leqslant 0$时,$f(x)=ax+\cos x$,依题须使$f'(x)=a-\sin x\geqslant 0$恒成立,则$a\geqslant 1$;当$x>0$时,由$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-a+4$在$(0,+\infty)$上递增,须使$f'(x)=x^2+2ax\geqslant 0$在$(0,+\infty)$上恒成立,则$-a\leqslant 0$,即$a\geqslant 0$;又由$f(x)$在$\mathbf{R}$上递增,可得$-a+4\geqslant 1$,解得$a\leqslant 3$.综上可得,$a$的取值范围是$[1,3]$.故选C.

7.C 【解析】因为$f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$|\theta|<\frac{\pi}{2}$,$\theta=\frac{\pi}{3}$,当$x\in\left(0,\frac{5\pi}{6}\right)$时,$\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{3}\right)$,因为$f(x)$在$\left(0,\frac{5\pi}{6}\right)$上只有1个零点,所以$\pi<\frac{5\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{3}\leqslant 2\pi$,解得$\frac{4}{5}<\omega\leqslant 2$,当$x\in\left(-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$时,$\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{2\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{3}\right)$,因为$\frac{4}{5}<\omega\leqslant 2$,所以$-\pi\leqslant-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}<-\frac{\pi}{5}$,又因为$f(x)$在$\left(-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$上单调递增,所以$\begin{cases}-\frac{\pi}{2}\leqslant-\frac{2\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3},\\ \frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$解得$\omega\leqslant 1$.综上可得$\frac{4}{5}<\omega\leqslant 1$.故选C.

8.B 【解析】令$f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$,$x\in(0,1)$,$\therefore f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}>0$,$\therefore f(x)$在$(0,1)$上单调递增,所以$f(x)>f(0)=0$,即$\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$,$x\in(0,1)$,$\therefore \ln(1+0.02)>\frac{0.02}{1+0.02}=\frac{1}{51}$,所以$a>c$;令$g(x)=\sin x-\ln(1+x)$,$x\in(0,1)$,$\therefore g'(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}$,令$h(x)=g'(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}$,$x\in(0,1)$,$h'(x)=-\sin x+\frac{1}{(1+x)^2}$,令$y=h'(x)$,则$y'=-\cos x-\frac{2}{(1+x)^3}<0$,所以$h'(x)$在$x\in(0,1)$上单调递减,$h'(0)=1>0$,$h'(1)=-\sin 1+\frac{1}{4}<-\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}<0$,所以存在唯一$x_0\in(0,1)$,使得$h'(x_0)=0$,即当$x\in(0,x_0)$时,$h'(x)>0$,当$x\in(x_0,1)$时,$h'(x)<0$,即$h(x)$在$(0,x_0)$上单调递增,在$(x_0,1)$上单调递减,所以$h(x)$的最小值为$h(0)$,$h(1)$中一个,而$h(0)=0$,$h(1)=\cos 1-\frac{1}{2}>\cos\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}=0$,所以$h(x)>h(0)=0$,即$g'(x)>0$,所以$g(x)$在$(0,1)$上单调递增,所以$g(x)>g(0)=0$,即$\sin x>\ln(1+x)$,$x\in(0,1)$,所以$\sin 0.02>\ln 1.02$,即$b>a$.所以$b>a>c$.故选B.

9.ABD 【解析】设 $z_1=a+bi,z_2=c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R})$，

对于选项 A，因为 $z_1z_2=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$，

所以 $|z_1z_2|=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$，

且 $|z_1||z_2|=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$，所以 $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$，故 A 正确；

对于选项 B，因为 $z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$，$\overline{z_1}=a-bi$，$\overline{z_2}=c-di$，

则 $\overline{z_1+z_2}=(a+c)-(b+d)i$，$\overline{z_1}+\overline{z_2}=(a+c)-(b+d)i$，

所以 $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$，故 B 正确；

对于选项 C，若 $|z_1|=|z_2|$，例如 $z_1=1+i,z_2=1-i$，满足 $|z_1|=|z_2|=\sqrt{2}$，

但 $z_1^2=(1+i)^2=2i$，$z_2^2=(1-i)^2=-2i$，即 $z_1^2\neq z_2^2$，故 C 错误；

对于选项 D，因为 $z_1\cdot z_2=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$，

所以 $\overline{z_1\cdot z_2}=(ac-bd)-(ad+bc)i$，$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(a-bi)(c-di)=(ac-bd)-(ad+bc)i$，

所以 $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$，故 D 正确.故选 ABD.

10.ACD 【解析】依题意可得 $A=2$，故 A 正确；$\because \frac{T}{2}=\frac{5}{24}\pi+\frac{\pi}{24}=\frac{\pi}{4}$，$T=\frac{\pi}{2}$，$\therefore \frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$，解得 $\omega=4$，

所以 $f(x)=2\sin(4x+\varphi)$，又函数过点 $\left(-\frac{\pi}{24},2\right)$ 可得 $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=2$，又 $0<\varphi<\pi$，则 $-\frac{\pi}{6}<-\frac{\pi}{6}+\varphi<\frac{5\pi}{6}$，

所以 $-\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，则 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$，所以 $f(x)=2\sin\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)$，则 $y=f\left(x+\frac{\pi}{24}\right)=2\sin\left[4\left(x+\frac{\pi}{24}\right)+\frac{2\pi}{3}\right]=2\sin\left(4x+\frac{5\pi}{6}\right)$，为非奇非偶函数，故 B 错误；

因为 $f(x)=2\sin\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)$，所以 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)+f\left(\frac{2\pi}{8}\right)+f\left(\frac{3\pi}{8}\right)+f\left(\frac{4\pi}{8}\right)=2\sin\left(4\times\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi}{3}\right)+2\sin\left(4\times\frac{2\pi}{8}+\frac{2\pi}{3}\right)+2\sin\left(4\times\frac{3\pi}{8}+\frac{2\pi}{3}\right)+2\sin\left(4\times\frac{4\pi}{8}+\frac{2\pi}{3}\right)=2\cos\frac{2\pi}{3}-2\sin\frac{2\pi}{3}-2\cos\frac{2\pi}{3}+2\sin\frac{2\pi}{3}=0$，又 $T=\frac{\pi}{2}$，$2\,024=4\times 506$

所以 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)+f\left(\frac{2\pi}{8}\right)+f\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\cdots+f\left(\frac{2\,024\pi}{8}\right)=506\left[f\left(\frac{\pi}{8}\right)+f\left(\frac{2\pi}{8}\right)+f\left(\frac{3\pi}{8}\right)+f\left(\frac{4\pi}{8}\right)\right]=0$，故 C 正确；

将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位长度后所得函数为 $y=2\sin\left[4\left(x-\frac{\pi}{24}\right)+\frac{2\pi}{3}\right]=2\cos 4x$，故 D 正确；故选 ACD.

11.BCD 【解析】令 $x=y=1$，得 $f(2)+f(2)=-f(2)f(0)$，又 $f(2)=2\neq 0$，所以 $f(0)=-2$，故 A 错误；

令 $y=-x$ 得，$f(2x)+f(-2x)=-f(0)f(2x)=2f(2x)$，所以 $f(-2x)=f(2x)$，$\forall x\in\mathbf{R}$，所以 $f(x)$ 为偶函数，故 B 正确；

令 $x=1,y=0$，得 $f(2)+f(0)=-f^2(1)=0$，所以 $f(1)=0$，又 $f(1-x)+f(1+x)=-f(1)f(-x)=0$，所以 $f(x+1)=-f(-x+1)$，而 $f(x+1)$ 的定义域是全体实数，所以 $f(x+1)$ 为奇函数，故 C 正确；

$f(x+2)+f(x)=-f(x+1)f(1)=0$，所以 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=f(x)$，故 4 是 $f(x)$ 的周期，又 $f(0)=-2$，$f(1)=0$，$f(2)=2$，所以 $f(3)=f(-1)=f(1)=0$，$f(4)=f(0)=-2$，$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0+2+0-2=0$，$\sum_{i=1}^{2\,024}f(i)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(2\,024)=506(f(1)+f(2)+f(3)+f(4))=0$.故 D 正确.故选 BCD.

12.7；$2\sqrt{3}$ 【解析】由 $1\leqslant x\leqslant y\leqslant 4$ 知，$\frac{3}{x}+y\leqslant\frac{3}{1}+4=7$，当 $x=1,y=4$ 时，得最大元素 $M=7$，又 $\frac{3}{x}+y\geqslant\frac{3}{x}+$

$x \geqslant 2\sqrt{3}$，当 $x=y=\sqrt{3}$ 时，得最小元素 $N=2\sqrt{3}$.故答案为 7；$2\sqrt{3}$.

13.$y=x$　【解析】设直线 l：$y=kx+b$ 与 $f(x)$ 的图象相切于点 $P_1(x_1,y_1)$ 与 $g(x)$ 的图象相切于点 $P_2(x_2,y_2)$，又 $f'(x)=\mathrm{e}^{x-1}$，$g'(x)=\mathrm{e}^{x}$，且 $y_1=\mathrm{e}^{x_1-1}$，$y_2=\mathrm{e}^{x_2}-1$.曲线 $y=f(x)$ 在点 $P_1(x_1,y_1)$ 处的切线方程为 $y-\mathrm{e}^{x_1-1}=\mathrm{e}^{x_1-1}(x-x_1)$，曲线 $y=g(x)$ 在点 $P_2(x_2,y_2)$ 处的切线方程为 $y-\mathrm{e}^{x_2}+1=\mathrm{e}^{x_2}(x-x_2)$.

故 $\begin{cases}\mathrm{e}^{x_1-1}=\mathrm{e}^{x_2},\\ \mathrm{e}^{x_1-1}-x_1\mathrm{e}^{x_1-1}=\mathrm{e}^{x_2}-x_2\mathrm{e}^{x_2}-1,\end{cases}$ 解得 $x_1-x_2=1$，故 $k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{\mathrm{e}^{x_1-1}-\mathrm{e}^{x_2}+1}{1}=1$，

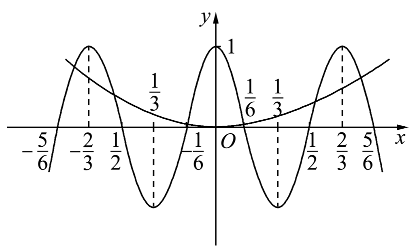
所以 $\mathrm{e}^{x_1-1}=1$，$x_1=1$，直线 l 的方程为 $y=x$.故答案为 $y=x$.

14.6　【解析】设函数 $h(x)=x^2$ 和 $g(x)=\cos(3\pi x)$，$g(x)=\cos(3\pi x)$ 为偶函数，周期 $T=\dfrac{2\pi}{3\pi}=\dfrac{2}{3}$，$g(0)=1$，

$g\left(\dfrac{1}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$，$g\left(\dfrac{1}{3}\right)=\cos\pi=-1$，$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\cos\dfrac{3}{2}\pi=0$，$g\left(\dfrac{2}{3}\right)=\cos 2\pi=1$，$g\left(\dfrac{5}{6}\right)=\cos\dfrac{5\pi}{2}=0$，

$h\left(\dfrac{5}{6}\right)=\left(\dfrac{5}{6}\right)^2=\dfrac{25}{36}<1$，$h\left(\dfrac{2}{3}\right)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}<1$，

可作出函数 $h(x)=x^2$ 和 $g(x)=\cos(3\pi x)$ 的大致图象，如图，



由图可得，两个函数的图象共有 6 个交点，即函数 $f(x)$ 共有 6 个零点.故答案为 6.

15.**解**：(1) $f(x)=-\sin\left(\dfrac{1}{2}x\right)-\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{1}{2}x\right)=2\sin\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$，………………………………… 3 分

令 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \leqslant \dfrac{1}{2}x-\dfrac{2\pi}{3} \leqslant \dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\dfrac{\pi}{3}+4k\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{7\pi}{3}+4k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[\dfrac{\pi}{3}+4k\pi,\dfrac{7\pi}{3}+4k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$. ……………………………… 6 分

(2)将函数 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{4}$（纵坐标不变），得到 $y=2\sin\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$；………… 7 分

再将所得的函数图象上所有点向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到 $g(x)=2\sin\left[2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{2\pi}{3}\right]=2\sin 2x$，…… 8 分

因为 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，则 $2x\in[0,\pi]$，可得 $\sin 2x\in[0,1]$，即 $g(x)=2\sin 2x\in[0,2]$，………………… 11 分

所以 $g(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 2，此时 $2x=\dfrac{\pi}{2}$，$x=\dfrac{\pi}{4}$. ………………………………… 13 分

16.**解**：(1)由题可知，$f'(x)=3x^2-8ax-3a^2$，$f''(x)=6x-8a$，……………………………………… 1 分

$f''(4)=6\times 4-8a=0$，解得 $a=3$. ……………………………………………………………… 2 分

所以 $f(x)=x^3-12x^2-27x+2$，$f'(x)=3x^2-24x-27$. ……………………………………… 3 分

令 $f'(x)>0$，得 $x<-1$ 或 $x>9$，令 $f'(x)<0$，得 $-1<x<9$，……………………………………… 5 分

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1,9)$，单调递增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(9,+\infty)$. ……………… 6 分

(2)由(1)可知，$f''(x)=6x-8a$，$f''(m)=6m-8a=0$，$m=\dfrac{4a}{3}>0$，所以 $a>0$. ………………… 7 分

令 $f'(x)>0$,解得 $x<-\frac{a}{3}$ 或 $x>3a$; …………………………………………………………………………… 8 分

令 $f'(x)<0$,解得 $-\frac{a}{3}<x<3a$. ………………………………………………………………………………………… 9 分

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(-\frac{a}{3},3a\right)$,单调递增区间为 $\left(-\infty,-\frac{a}{3}\right)$ 和 $(3a,+\infty)$, ………………… 10 分

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(3a)=2-18a^3$,$f(x)$ 的极大值为 $f\left(-\frac{a}{3}\right)=2+\frac{14}{27}a^3>0$. …………………… 12 分

当 $x\to-\infty$ 时,$f(x)\to-\infty$,

故当 $2-18a^3<0$,即 $a>\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ 时,$f(x)$ 有三个零点; ………………………………………………………… 13 分

当 $2-18a^3=0$,即 $a=\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ 时,$f(x)$ 有两个零点; …………………………………………………………… 14 分

当 $2-18a^3>0$,即 $0<a<\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ 时,$f(x)$ 有一个零点. …………………………………………………………… 15 分

17.**解**:(1)因为函数 $f(x)=\log_2\left(2^x+a+\frac{1}{2^x}\right)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

所以 $2^x+a+\frac{1}{2^x}>0$ 恒成立,

所以 $4^x+a\cdot 2^x+1>0$ 恒成立, ……………………………………………………………………………………… 2 分

令 $t=2^x$,则 $t>0$,所以 $t^2+at+1>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,

即当 $t>0$ 时,$a>-\left(t+\frac{1}{t}\right)$ 恒成立,

函数 $y=-\left(t+\frac{1}{t}\right)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减, ……………………………………………… 4 分

所以 $y_{\max}=-2$,

故 $a>-2$,即 a 的取值范围为 $(-2,+\infty)$ ……………………………………………………………………………… 6 分

(2)当 $a=0$ 时,$f(x)=\log_2\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)=\log_2(4^x+1)-x$, ……………………………………………………… 7 分

因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

又因为 $f(-x)=\log_2(4^{-x}+1)+x=\log_2(4^x+1)-\log_2 4^x+x=\log_2(4^x+1)-x=f(x)$,

所以 $f(x)$ 为偶函数. …… 9 分

当 $x>0$ 时,$f(x)=\log_2(4^x+1)-x=\log_2(4^x+1)-\log_2 2^x=\log_2\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)$, ………………………… 10 分

令 $m=2^x>1$,

因为函数 $y=m+\frac{1}{m}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,且 $y=\log_2 x$ 在定义域上为增函数,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, ……………………………………………………………………………… 12 分

又因为函数 $f(x)$ 在定义域上为偶函数,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, ……………………………………………… 13 分

因为 $f(t+1)>f(1-2t)$,

所以 $|t+1|>|1-2t|$,即 $(t+1)^2>(1-2t)^2$,解得 $0<t<2$,故原不等式解集为 $(0,2)$. ………………………… 15 分

18.**解**:(1)$f(x)=5\cos\theta\cdot\sin x-5\sin(x-\theta)+(4\tan\theta-3)\sin x-5\sin\theta$

$=5\cos\theta\cdot\sin x-5\sin x\cos\theta+5\cos x\sin\theta+(4\tan\theta-3)\sin x-5\sin\theta$

$=5\cos x\sin\theta+(4\tan\theta-3)\sin x-5\sin\theta$ …………………………………………………… 2 分

因为函数 $f(x)$的图象关于 y 轴对称,$f(x)$是偶函数,

所以 $f(-x)=f(x)$,

所以 $5\cos x\sin\theta+(4\tan\theta-3)\sin(-x)-5\sin\theta=5\cos x\sin\theta+(4\tan\theta-3)\sin x-5\sin\theta$ ……………… 3 分

所以 $(4\tan\theta-3)\sin x=0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

则 $4\tan\theta-3=0,\tan\theta=\frac{3}{4}$. ………………………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $\tan\theta=\frac{3}{4},0<\theta<\frac{\pi}{2}$,所以 $\sin\theta=\frac{3}{5}$. ……………………………………………………… 6 分

$f(x)=5\cos x\cdot\sin\theta-5\sin\theta=3(\cos x-1)$,

因此,$f(x)$的最大值为 0,此时,x 的集合为$\{x\mid x=2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.……………………………………… 8 分

(3)$g(x)=\lambda f(\omega x)-f\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right)=3\lambda\cos\omega x-3\lambda-3\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right)+3=3\lambda\cos\omega x-3\lambda+3\sin\omega x+3$.

由 $g(x)$在 $x=\frac{\pi}{6}$处有最小值,知 $g(x)$的图象关于 $x=\frac{\pi}{6}$对称,且点$\left(\frac{2}{3}\pi,3-3\lambda\right)$在函数图象上 ……… 10 分

有 $g\left(-\frac{\pi}{3}\right)=g\left(\frac{2\pi}{3}\right)=3-3\lambda$.

故 $3\lambda\cos\left(-\frac{\omega\pi}{3}\right)+3\sin\left(-\frac{\omega\pi}{3}\right)=0$,

且 $3\lambda\cos\frac{2\omega\pi}{3}+3\sin\frac{2\omega\pi}{3}=0$.

从而,$\lambda=\tan\frac{\omega\pi}{3}=-\tan\frac{2\omega\pi}{3}=\tan\left(-\frac{2\omega\pi}{3}\right)=\tan\left(k\pi-\frac{2\omega\pi}{3}\right)$. ………………………………………… 12 分

则$\frac{\omega\pi}{3}=k\pi-\frac{2\omega\pi}{3}$,即 $\omega=k\in\mathbf{Z}$.

又 $\omega>0,\lambda>0$,所以 $\lambda=\sqrt{3},\tan\frac{\omega\pi}{3}=\sqrt{3}$,$\therefore\frac{\omega\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+n\pi,n\in\mathbf{N}$,得 $\omega=1+3n,n\in\mathbf{N}$. …………………… 14 分

当 $\omega=1$ 时,$g(x)=3\sqrt{3}\cos x+3\sin x+3-3\sqrt{3}=6\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+3-3\sqrt{3}$.

显然,$g(x)$在 $x=\frac{\pi}{6}$处有最大值,而不是最小值.矛盾. ……………………………………………………… 15 分

当 $\omega=4$ 时,$g(x)=3\sqrt{3}\cos 4x+3\sin 4x+3-3\sqrt{3}=6\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)+3-3\sqrt{3}$.

显然,$g(x)$在 $x=\frac{\pi}{6}$处既不是有最大值,也不是最小值.矛盾. ………………………………………………… 16 分

当 $\omega=7$ 时,$g(x)=3\sqrt{3}\cos 7x+3\sin 7x+3-3\sqrt{3}=6\sin\left(7x+\frac{\pi}{3}\right)+3-3\sqrt{3}$.

显然,$g(x)$在 $x=\frac{\pi}{6}$处取最小值,且 $y=g(x)$的图象关于点$\left(\frac{2\pi}{3},3-3\sqrt{3}\right)$中心对称.

所以,$\lambda+\omega$ 的最小值为$\sqrt{3}+7$. ……………………………………………………………………………… 17 分

19.**解**:(1)设 $R(x)=\frac{a_0+ax}{1+bx}$,由 $f(x)=\ln(x+1)$,得 $R(0)=f(0)=0$,得 $a_0=0$,即 $R(x)=\frac{ax}{1+bx}$

知 $f'(x)=\frac{1}{x+1}$，$f''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$，$R'(x)=\frac{a}{(1+bx)^2}$，$R''(x)=\frac{-2ab}{(1+bx)^3}$， …………………………………… 2 分

由题意 $f'(0)=R'(0)$，$f''(0)=R''(0)$，

所以 $\begin{cases}a=1\\-2ab=-1\end{cases}$，所以 $a=1$，$b=\frac{1}{2}$. $R(x)=\frac{2x}{x+2}$ …………………………………………………… 4 分

(2)由(1)知，$R(x)=\frac{2x}{x+2}$，令 $\varphi(x)=f(x)-R(x)=\ln(x+1)-\frac{2x}{x+2}(x>-1)$，………………………… 5 分

则 $\varphi'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{4}{(x+2)^2}=\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}>0$，…………………………………………………… 7 分

所以 $\varphi(x)$ 在其定义域 $(-1,+\infty)$ 内单调递增，

又 $\varphi(0)=f(0)-R(0)=0$，

$\therefore x\geqslant0$ 时，$\varphi(x)=f(x)-R(x)\geqslant\varphi(0)=0$；

$-1<x<0$ 时，$\varphi(x)=f(x)-R(x)<\varphi(0)=0$，…………………………………………………………… 8 分

所以 $x\geqslant0$ 时，$f(x)\geqslant R(x)$；$-1<x<0$ 时，$f(x)<R(x)$.………………………………………………… 9 分

(3)由(1)知，$h(x)=m\ln x-\frac{x-1}{x+1}(x>0)$，

注意到 $h(1)=0$，则 $h(x)$ 除 1 外还有 2 个零点，设为 x_1，x_2，

$h'(x)=\frac{m}{x}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{mx^2+(2m-2)x+m}{x(x+1)^2}$，……………………………………………………… 11 分

令 $g(x)=mx^2+(2m-2)x+m(x>0)$，

当 $m<0$ 时，$g(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，则 $h'(x)<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，不满足，舍去，…………………………………………………………… 12 分

当 $m>0$ 时，$h(x)$ 除 1 外还有 2 个零点，设为 x_1，x_2，则 $h(x)$ 不单调，

所以 $g(x)$ 存在两个零点，$\therefore\Delta=(2m-2)^2-4m^2>0$，解得 $0<m<\frac{1}{2}$，………………………………… 13 分

当 $0<m<\frac{1}{2}$ 时，设 $g(x)$ 的两个零点分别为 s，$t(s<t)$，

则 $s+t=-\frac{2m-2}{m}=\frac{2}{m}-2>0$，$st=1$，………………………………………………………………………… 14 分

$\therefore0<s<1<t$，当 $x\in(0,s)$ 时，$g(x)>0$，$h'(x)>0$，则 $h(x)$ 单调递增，

当 $x\in(s,t)$ 时，$g(x)<0$，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 单调递减；

当 $x\in(t,+\infty)$ 时，$g(x)>0$，$h'(x)>0$，则 $h(x)$ 单调递增，……………………………………………… 15 分

又 $h(1)=0$，故 $h(s)>0$，$h(t)<0$，

而 $h(e^{-\frac{1}{m}})=-1-\frac{e^{-\frac{1}{m}}-1}{e^{-\frac{1}{m}}+1}<0$，且 $0<e^{-\frac{1}{m}}<1$，$\therefore h(e^{-\frac{1}{m}})<0$，$h(e^{\frac{1}{m}})=1-\frac{e^{\frac{1}{m}}-1}{e^{\frac{1}{m}}+1}$，且 $e^{\frac{1}{m}}>1$，所以 $h(e^{\frac{1}{m}})>0$，

所以存在 $x_1\in(e^{-\frac{1}{m}},s)$，$x_2\in(t,e^{\frac{1}{m}})$，满足 $h(x_1)=h(x_2)=0$，

即 $h(x)=mf(x-1)-\frac{1}{2}R(x-1)$ 有 3 个零点 x_1，1，x_2，

综上所述，m 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. ……………………………………………………………………… 17 分